Prova Scritta 30 Luglio 2012

---

1) Sono dati due vettori uguali in modulo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formanti un certo angolo θ_{ab} . Calcolare $m = \left\|\vec{a}\right\| = \left\|\vec{b}\right\|$ sapendo che il modulo della loro somma vale 16 ed il modulo della loro differenza vale 9.

Soluzione

Il parallelogramma formato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, uguali in modulo, è un rombo. Le due diagonali del rombo rappresentano, geometricamente la somma e la differenza di $\vec{a}$ e $\vec{b}$. In particolare la diagonale del rombo che parte dal vertice comune dei due vettori è lunga quanto il modulo della somma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ mentre l'altra diagonale è lunga quanto il modulo della differenza $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. Le diagonali di un rombo si intersecano formando 4 angoli di 90° e dividono perciò il rombo in 4 triangoli rettangoli uguali. Ciascuno di questi triangoli ha i cateti di misura 12 e 5 e l'ipotenusa di misura pari a

$$ip = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 64} = \frac{\sqrt{337}}{2} \simeq 9.18 \ .$$

Ma l'ipotenusa coincide con il lato del rombo e quindi $m = ip \simeq 9.18$.

---

2) Un punto materiale di massa $m = 1\,kg$ viene lanciato da terra ad un certo istante. La sua velocità iniziale forma, con il suolo, un angolo $\alpha_0 = 30^\circ$. Si determini il tempo t_f impiegato dal punto per ricadere al suolo e la distanza del punto materiale dal punto di lancio all'istante $t_* = \dfrac{t_f}{3}$.

Soluzione

Le coordinate cartesiane del punto materiale sono

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha_0 t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha_0 t \end{cases}$$

rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano con asse x parallelo al suolo, asse y perpendicolare al suolo e diretto verso l'alto e con origine O nel punto di lancio. Con v_0 indichiamo il modulo della velocità iniziale del punto.

Il tempo impiegato dal punto materiale per ricadere al suolo è il doppio del tempo t_m impiegato dal punto per raggiungere la quota massima. All'istante t_m la velocità del punto lungo l'asse y si annulla:

$$\dot{y}(t_m) = 0 \Rightarrow -g t_m + v_0 \sin \alpha_0 = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

e quindi

$$t_f = \frac{2 v_0 \sin \alpha_0}{g} .$$

All'istante $t_* = \dfrac{t_f}{4} = \dfrac{v_0 \sin \alpha_0}{2g}$ la distanza del punto materiale dal punto di lancio (in O) sarà (teorema di Pitagora):

$$d_* = \sqrt{x(t_*)^2 + y(t_*)^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{2g} \right)^2 + \left[-\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{2g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha_0 \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{2g} \right) \right]^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2} \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 + \left[-\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{8g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} \right]^2} = \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2} \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 + \frac{9}{64} \frac{v_0^4 \sin^4 \alpha_0}{g^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{v_0^4}{4g^2} \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \alpha_0 + \frac{9}{64} \frac{v_0^4 \sin^4 \alpha_0}{g^2}} = \frac{v_0^2}{2g} \sin \alpha_0 \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \frac{9}{16} \sin^2 \alpha_0} =$$

$$= \frac{v_0^2}{2g} \sin\alpha_0 \sqrt{1 - \frac{7}{16}\sin^2\alpha_0} = \frac{v_0^2}{4g}\sqrt{\frac{57}{64}} = \frac{v_0^2}{32g}\sqrt{57}$$

---

3) Un'automobile percorre un circuito circolare con velocità di modulo costante ed accelerazione, in modulo, pari a $\|\vec{a}\| = g / 4$. Determinare la lunghezza del circuito sapendo che l'auto percorre 20 giri in 10 minuti.

Soluzione

Il moto dell'automobile è circolare uniforme. L'accelerazione è solo centripeta e vale la relazione

$$\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R} = \frac{g}{4} \simeq \frac{9.81m}{4s^2}$$

dove v è il modulo della velocità e R è il raggio del circuito e vale che $L = 2\pi R$ (L è la lunghezza del circuito, da calcolare). Se l'auto compie 20 giri in 10 minuti allora il modulo della sua velocità è

$$v = \frac{20 \times L}{10\,\text{min}} = \frac{20L}{600s}.$$

Sostituendo nell'espressione per l'accelerazione otteniamo l'equazione risolvente:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g}{4} \Rightarrow \frac{\left(\frac{20L}{600s}\right)^2}{\frac{L}{2\pi}} = \frac{g}{4} \Rightarrow 400\pi L = (600s)^2\frac{g}{4} \Rightarrow L \simeq \frac{1}{800\pi}\frac{(600s)^2}{4}9.81\frac{m}{s^2} \simeq 351\ m.$$

---

4) Un tuffatore si lancia da un trampolino alto $h = 3m$ rispetto al livello dell'acqua. Sapendo che immediatamente dopo il tuffo il tuffatore si muove con una velocità pari a $v_0 = 5\ m / s$ verso l'alto, determinare con quale velocità entra in acqua.

Soluzione

L'energia meccanica totale del tuffatore si conserva durante tutto il tuffo. Inizialmente il tuffatore si muove verso l'alto con velocità v_0 e si trova ad una quota h . Quindi la sua energia meccanica iniziale sarà

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh \, .$$

Quando il tuffatore entra in acqua si trova ad una quota $h = 0 \, m$ e quindi la sua energia meccanica vale

$$E_f = \frac{1}{2} m v_f^2 \, .$$

Per la conservazione dell'energia, perciò:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh + v_0^2} \simeq 9.16 \frac{m}{s} \, .$$

---

5) Un corpo di massa $m = 1 kg$, è fermo su un piano inclinato rispetto a terra di $\alpha = 30^\circ$, in presenza di attrito statico. Sapendo che il corpo incomincia a muoversi per l'effetto di una forza $\vec{F}$ con modulo al minimo uguale a $\left\|\vec{F}\right\| = 0.5 \, N$ e diretta parallelamente al piano, determinare il coefficiente di attrito statico del piano f .

Soluzione

Il corpo è inizialmente fermo, in equilibrio. Su di esso agiscono la forza peso, la reazione vincolare del piano inclinato e la forza di attrito statico. In particolare la forza peso ha una componente pari

$$P_t = mg \sin \alpha$$

lungo il piano, ed una componente $P_n = mg \cos \alpha$ ortogonalmente al piano diretta verso il piano stesso. La reazione vincolare del piano $\vec{R}$ agisce solo ortogonalmente al piano stesso, in verso opposto a P_n e quindi, in condizioni di equilibrio ed agendo la forza di attrito in direzione tangente al piano

$$P_n = R \Rightarrow mg\cos\alpha = R\,.$$

La forza di attrito stati equilibra esattamente l'effetto della forza peso nella direzione tangenziale al piano inclinato:

$$F_s = mg\sin\alpha\,.$$

Il valore massimo della forza di attrito statico è $F_{s,max} = f\left\|\vec{R}\right\| = fmg\cos\alpha$ ovvero deve essere:

$$F_s \le F_{s,max} \Rightarrow mg\sin\alpha \le fmg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{f \ge \tan 30^\circ \simeq 0.577}$$

affinché l'attrito statico sia sufficiente a stabilizzare la forza peso.

Per ipotesi, quando applichiamo una forza uguale a $\vec{F}$ diretta tangenzialmente al piano la forza di attrito ha valore massimo. Se $\vec{F}$ è diretta verso il basso allora, proiettando la $\vec{F} = m\vec{a}$ in direzione tangenziale al piano otterremo:

$$F + mg\sin\alpha = fmg\cos\alpha \Rightarrow$$

$$f = \frac{F + mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} \simeq \frac{0.5N + 1kg \times 9.81\frac{m}{s^2}\times\frac{1}{2}}{1kg \times 9.81\frac{m}{s^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}} \simeq \frac{10.81}{\sqrt{3}\times 9.81} \simeq 0.636\,.$$

Se la forza $\vec{F}$ fosse diretta verso l'alto (quindi in verso opposto alla forza peso) otterremmo invece:

$$-F + mg\sin\alpha = fmg\cos\alpha \Rightarrow$$

$$f = \frac{-F + mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} \simeq \frac{-0.5N + 1kg \times 9.81\frac{m}{s^2}\times\frac{1}{2}}{1kg \times 9.81\frac{m}{s^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}} \simeq \frac{8.81}{\sqrt{3}\times 9.81} \simeq 0.518$$

che non è accettabile perché minore di 0.577 . Questo valore di f non sarebbe in grado di garantire l'equilibrio statico in presenza della sola forza peso.

Costanti: $g = 9.81\, m / s^2$, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N\, m^2\, kg^{-2}$, $M_T = 5.971 \cdot 10^{24}\, kg$, $R_T = 6.37 \cdot 10^6\, m$, $M_L = 7.35 \cdot 10^{22}\, kg$, $R_L = 1738\, km$.
